Über die abzählbare n-Rektifizierbarkeit der Graphen

Jonathan Frech
⟨info@jfrech.com⟩

19. August 2021

I Einleitung

Diese Bachelorarbeit widmet sich der Charakterisierung der abzählbaren n-Rektifizierbarkeit der Graphen mittels Eigenschaften der zugrundeliegenden Abbildungen. Fordert man eine im Maß approximative Schranke an den Differenzenquotienten der Abbildung, so folgt mit einem Regularitätssatz nach Federer [Fed69] und elementarer Maßtheorie schnell die abzählbare n-Rektifizierbarkeit des Graphen. Umgekehrt jedoch wird mit dem Approximationssatz von Whitney [EG92, S. 251: 6.6 Theorem 1] der Graph differentialgeometrisch analysiert, zerlegt und maßtheoretisch interpretiert. Das Resultat ist eine Charakterisierung der abzählbaren n-Rektifizierbarkeit des Graphens durch eine schwache maßtheoretische Eigenschaft der zugrundeliegenden Abbildung, wobei ein Defekt einer Nullmenge entsteht.

I.I Notation

Die Notation in diesem Text gleicht in großen Teilen der in [EG92]. Aufgrund der Zentralität des Raumes $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ in dieser Betrachtung wird falls nicht anders erwähnt $\pi := \pi_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^{n+m} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ als die Projektion auf die ersten n Koordinaten und $\pi^\perp := \pi_{\mathbb{R}^{n\perp}} : \mathbb{R}^{n+m} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ als die auf die letzten m gesetzt. Der Graßmann wird $\mathrm{G}(n+m, n) := \{\text{nicht orientierten } n\text{-dimensionalen Ebenen}\}$ notiert, $\mathrm{B}_r(x)$ bezeichnet den offenen, $\overline{\mathrm{B}}_r(x)$ den abgeschlossenen Ball mit Radius $r > 0$. Mengeninklusion „$\subset$“ schließt Mengengleichheit nicht aus. Der Jacobi einer Abbildung f wird $\mathsf{J}\, f$, die charakteristische Funktion einer Menge A wird χ_A notiert. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind positiv und es werden deutsche Operatornamen wie $\mathsf{Bild}\, f := f(\mathsf{Dom}\, f)$ genutzt.

II Allgemeine n-rektifizierbare Mengen

Definition 1 (Abzählbare n-Rektifizierbarkeit). Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ heißt *abzählbar n-rektifizierbar*, falls M messbar bezüglich des Hausdorff-Maßes $\mathcal{H}^n$ ist, sowie eine $\mathcal{H}^n$-Nullmenge M_0 und abzählbar viele Lipschitzabbildungen $F_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ existieren, sodass

$$M \subset M_0 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathsf{Bild}\, F_j.$$

Lemma 2 (Messbarkeit der Lipschitzbilder). Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{H}^s$-σ-endliche – damit insbesondere $\mathcal{H}^s$-messbare – Menge und $f : A \to \mathbb{R}^m$ lokal lipschitzstetig. Dann ist das Lipschitzbild $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ erneut $\mathcal{H}^s$-messbar.

Beweis. Sei $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$ die Vereinigung abzählbar vieler $\mathcal{H}^s$-messbarer Mengen A_j endlichen Maßes $\mathcal{H}^s(A_j) < \infty$. Nach [EG92, S. 61: 2.1 Theorem 1] ist $\mathcal{H}^s$ borelregulär und mit [EG92, S. 5: 1.1 Theorem 3] ist $\mathcal{H}^s\lfloor_{A_j}$ radon. Somit gilt für die $\mathcal{H}^s\lfloor_{A_j}$-messbaren Mengen A_j nach [EG92, S. 8: 1.1 Theorem 4 (ii)], dass

$$\mathcal{H}^s(A_j) = \sup\{\mathcal{H}^s(K) : K \subset A_j \text{ kompakt}\},$$

also existieren Folgen kompakter Mengen $K_{j,i} \subset A_j$, sodass

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(A_j) &= \lim_{i\to\infty} \mathcal{H}^s(K_{j,i}) \le \lim_{i\to\infty} \mathcal{H}^s(\bigcup_{k\le i} K_{j,k}) \\ &= \mathcal{H}^s(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\le i} K_{j,k}) = \mathcal{H}^s(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_{j,i}) \le \mathcal{H}^s(A_j).\end{aligned}$$

Setzt man $B_j := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_{j,i} \subset A_j$, so ist nach obiger Rechnung die Masse $\mathcal{H}^s(A_j) = \mathcal{H}^s(B_j)$ gleich, also ist der Rand $C_j := A_j - B_j$ eine Nullmenge.
Da f stetig ist, sind alle Bilder $f(K_{j,i})$ als stetige Bilder kompakter Mengen selbst kompakt und somit borel, also ist auch $f(B_j) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(K_{j,i})$ borel und damit $\mathcal{H}^s$-messbar. Sei nun $\varrho : A \to]0,\infty[$ eine Auswahl, sodass für alle Punkte $x \in A$ die Einschränkung $f|(\mathrm{B}_{\varrho(x)}(x)) \in \mathrm{C}^{0,1}(\mathrm{B}_{\varrho(x)}(x), \mathbb{R}^m)$ lipschitzstetig ist. Mittels der Lindelöf-Eigenschaft des umgebenden Raumes sei weiter $\{\mathrm{B}_{\varrho(x_\ell)}(x_\ell) : \ell \in \mathbb{N}\} \subset \{\mathrm{B}_{\varrho(x)}(x) : x \in A\}$ eine abzählbare offene Teilüberdeckung. Nach [EG92, S. 75: 2.4 Theorem 1] erhöhen die Lipschitzabbildungen $f|(\mathrm{B}_{\varrho(x_\ell)}(x_\ell))$ nicht die Hausdorffdimension und

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(f(C_j)) &= \mathcal{H}^s(\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} f(\mathrm{B}_{\varrho(x_\ell)}(x_\ell) \cap C_j)) \le \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(f|(\mathrm{B}_{\varrho(x_\ell)}(x_\ell))(C_j)) \\ &\le \sum_{\ell=1}^{\infty} \Big(\mathsf{Lip}(f|(\mathrm{B}_{\varrho(x_\ell)}(x_\ell)))\Big)^s \cdot \mathcal{H}^s(C_j) = 0.\end{aligned}$$

Da Nullmengen messbar sind, ist folglich

$$f(A) = f(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = f(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (B_j \cup C_j)) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Big(f(B_j) \cup f(C_j)\Big)$$

als abzählbare Vereinigung $\mathcal{H}^s$-messbarer Mengen selbst $\mathcal{H}^s$-messbar. $\square$

Lemma 3 (Abzählbare Stabilität). Die abzählbare Vereinigung abzählbar n-rektifizierbarer Mengen ist selbst abzählbar n-rektifizierbar.

Beweis. Für abzählbar viele abzählbar n-rektifizierbare Mengen M^k gelte $M^k \subset M_0^k \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathsf{Bild}\, F_j^k$, wobei $\mathcal{H}^n(M_0^k) = 0$ und $F_j^k \in \mathrm{C}^{0,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+m})$. Es ist $M_0 := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_0^k$ als abzählbare Vereinigung von Nullmengen selbst eine Nullmenge und folglich

$$M := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M^k \subset M_0 \cup \bigcup_{(k,j)\in\mathbb{N}^2} \mathsf{Bild}\, F_j^k$$

abzählbar n-rektifizierbar. □

Lemma 4 (Hausdorffdimensionsschranke). Abzählbar n-rektifizierbare Mengen haben höchstens Hausdorffdimension n.

Beweis. Sei $M \subset M_0 \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathsf{Bild}\, F_j$ eine abzählbar n-rektifizierbare Menge, wobei $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ verschwindet und alle $F_j \in \mathrm{C}^{0,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+m})$ lipschitzstetig sind. Mit [EG92, S. 75: 2.4 Theorem 1] folgt für $j \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{H}^{n+\varepsilon}(F_j(\mathbb{R}^n)) \leq (\mathsf{Lip}\, F_j)^{n+\varepsilon} \cdot \mathcal{H}^{n+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) = 0,$$

und mittels der Erhaltung von Nullmengen des Hausdorffmaßes in höheren Dimensionen [EG92, S. 65: 2.2 Lemma 2 (i)] folgt $\mathcal{H}^{n+\varepsilon}(M_0) = 0$.
Zusammen ergibt sich

$$\mathcal{H}^{n+\varepsilon}(M) \leq \mathcal{H}^{n+\varepsilon}(M_0) + \mathcal{H}^{n+\varepsilon}(F_j(\mathbb{R}^n)) = 0$$

und nach der Definition [EG92, S. 65: 2.2 Definition] der Hausdorffdimension

$$\begin{aligned} \mathsf{Dim}_{\mathcal{H}}(M) &:= \inf\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(M) = 0\} \\ &= \inf\{0 \leq s \leq n : \mathcal{H}^s(M) = 0\} \leq n. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5. Die Aussage des Lemmas 4 folgt weniger elementar auch aus Lemma 6.

Lemma 6 (σ-Endlichkeit). Abzählbar n-rektifizierbare Mengen sind $\mathcal{H}^n$-σ-endlich.

Beweis. Es sei $M \subset M_0 \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathsf{Bild}\, F_j$ eine abzählbar n-rektifizierbare Menge, wobei $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ und alle $F_j \in \mathrm{C}^{0,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+m})$ lipschitzstetig sind. Mittels [EG92, S. 75: 2.4 Theorem 1] und [EG92, S. 70: 2.2 Theorem 2] gilt für $r > 0$ und $j \in \mathbb{N}$ beliebig, dass

$$\mathcal{H}^n(F_j(\mathrm{B}_r(0))) \leq (\mathsf{Lip}\, F_j)^n \cdot \mathcal{H}^n(\mathrm{B}_r(0)) = (\mathsf{Lip}\, F_j)^n \cdot \omega_n r^n < \infty,$$

wobei $\omega_n := \mathcal{L}^n(\mathrm{B}_1(0))$ die n-dimensionale Einheitsballmasse bezeichne und man weiter $\mathrm{B}_r(0) \subset \mathsf{Dom}\, F_j = \mathbb{R}^n$ beachte.
Da $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_k(0)$ als Ganzes $\mathcal{H}^n$-σ-endlich ist, greift Lemma 2 und alle $F_j(\mathrm{B}_r(0))$ sind $\mathcal{H}^n$-messbar. Enumeriert man nun die abzählbar vielen $\mathcal{H}^n$-messbaren Mengen

$$\{M \cap F_j(\mathrm{B}_r(0)) : j \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}, r > 0\} =: \{\widetilde{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$$

und setzt $A_k := \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_\ell - \bigcup_{\ell<k} \widetilde{A}_\ell - M_0$, so ist

$$M = M_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

eine disjunkte abzählbare Vereinigung $\mathcal{H}^n$-messbarer und $\mathcal{H}^n$-endlicher Mengen.
□

III Graphen

Definition 7 (Graph). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $u : A \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Der *Graph von u* ist über das Bild von

$$\iota \times u : A \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}, \quad x \mapsto (x, u(x))$$

definiert, das heißt $\mathsf{Graph}\, u := \mathsf{Bild}(\iota \times u) = \{(x, u(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

III.I Hinreichende Bedingungen an die zugrundeliegende Abbildung

Lemma 8 (Graphen lokal lipschitzstetiger Abbildungen). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar bezüglich $\mathcal{H}^n$ und $u : A \to \mathbb{R}^m$ lokal lipschitzstetig. In diesem Fall ist $\mathsf{Graph}\, u$ abzählbar n-rektifizierbar.

Beweis. Es wähle $\varrho : A \to]0, \infty[$ Radien der lokalen Lipschitzeigenschaft aus; also ist für jeden Punkt $x \in A$ die Einschränkung $u|(A \cap \mathrm{B}_{\varrho(x)}(x))$ lipschitzstetig. Nach der Lindelöf-Eigenschaft des Raumes $A \subset \mathbb{R}^n$ seien $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ Punkte derart, dass $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_{\varrho(x_j)}(x_j)$. Setze nun für $j \in \mathbb{N}$

$$F_j := \iota \times u : \mathbb{R}^n \supset A \cap \mathrm{B}_{\varrho(x_j)}(x_j) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto (x, u(x))$$

und setze $\widetilde{F}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}, \widetilde{F}_j|(\mathsf{Dom}\, F_j) = F_j$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ nach [EG92, S. 80: 3.1 Theorem 1] beliebig lipschitzstetig fort, wobei sich die Lipschitzzahl möglicherweise ändert. Auf dem $\mathbb{R}^n$ gilt nach [EG92, S. 70: 2.2 Theorem 2], dass $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ gleicht und somit

$$\mathcal{H}^n(A \cap \mathrm{B}_{\varrho(x)}(x)) = \mathcal{L}^n(A \cap \mathrm{B}_{\varrho(x)}(x)) \leq \mathcal{L}^n\left(\overline{\mathrm{B}}_{\varrho(x)}(x)\right) < \infty,$$

da das Lebesguemaß ein Radonmaß ist. Insbesondere ist $A \cap \mathrm{B}_{\varrho(x)}(x)$ eine $\mathcal{H}^n$-σ-endliche Menge und zusammen mit Lemma 2 ist

$$\mathsf{Graph}\, u = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathsf{Bild}\, F_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathsf{Bild}\, \widetilde{F}_j$$

abzählbar n-rektifizierbar. □

Definition 9 (Approximativer Limes superior). Für einen Punkt $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ und eine reelle Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ ist der *approximative Limes superior*, notiert

$$\operatorname{ap} \limsup_{x \to a} f(x),$$

definiert nach [Fed69, S. 159: 2.9.12] als

$$\inf \{t \in \mathbb{R} : a \text{ ist Punkt der Lebesguedichte } 0 \text{ bezüglich } [f > t]\}.$$

Notiert man die Dichteeigenschaft explizit, so erhält man folgende äquivalente Definition [EG92, S. 47: 1.7 Definition]:

$$\inf \left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t])}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} = 0 \right\}$$

Des Weiteren definiert man für eine Teilmenge $B \subset A$ den *approximativen Limes superior in B* für $a \in B$ als

$$\operatorname{ap} \limsup_{\substack{x \to a, \\ x \in B}} f(x) := \operatorname{ap} \limsup_{x \to a} f|(B)(x).$$

Proposition 10 (Schwache, ausreichende Forderung an die Abbildung). Falls für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $u : A \to \mathbb{R}^m$ der approximative Limes superior des Differenzenquotienten in jedem Punkt endlich ist, das heißt

$$\forall\, a \in A : \quad \operatorname{ap} \limsup_{x \to a} |u(x) - u(a)|/|x - a| < \infty,$$

ist $\mathsf{Graph}\, u$ abzählbar n-rektifizierbar.

Beweis. Nach [Fed69, S. 217: Theorem 3.1.8] existiert eine $\mathcal{L}^n$-messbare Zerlegung $B_j \subset \mathbb{R}^n$, sodass $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j$ und $u|(B_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ lipschitzstetig ist. Da $\mathsf{Graph}\, u = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathsf{Graph}(u|(B_j))$ gilt, setzt sich diese abzählbare Zerlegung in das Bild fort und $\mathsf{Graph}\, u$ ist mit Lemma 8 eine abzählbare Vereinigung abzählbar n-rektifizierbarer Mengen und damit nach Lemma 3 selbst abzählbar n-rektifizierbar. □

Beispiel 11 (Stetige Dimensionszunahme). Sei $n < m$ und $\gamma : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^n$ eine stetige surjektive Kurve, deren Existenz in [Dug66, S. 105: IV 4.4 Theorem (Generalized Peano)] gezeigt wird. Projiziere mittels $\widetilde{\pi} : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^1$ die Kurve

$u : [0,1]^n \twoheadrightarrow [0,1]^m, u := \gamma \circ \widetilde{\pi}$ und erhalte eine stetige Surjektion in höhere Dimension hinein. Sei weiter $\pi^\perp : \mathbb{R}^{n+m} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ die Projektion auf die letzten m Koordinaten. Man beachte, dass $\pi^\perp$ lipschitzstetig mit $\mathsf{Lip}\,\pi^\perp < \infty$ ist, und schätze mit [EG92, S. 75: 2.4 Theorem 1] für $0 < \varepsilon < 1$ ab

$$\mathcal{H}^{n+\varepsilon}(\mathsf{Graph}\,u) \cdot \mathsf{Lip}\,\pi^\perp \geq \mathcal{H}^{n+\varepsilon}(\pi^\perp(\mathsf{Graph}\,u)) = \mathcal{H}^{n+\varepsilon}(\mathbb{R}^m) = \infty,$$

also $\mathsf{Dim}_{\mathcal{H}}(\mathsf{Graph}\,u) > n$ und $\mathsf{Graph}\,u$ ist mit Lemma 4 nicht abzählbar n-rektifizierbar.
Für den Fall $n = 1$ und $m = 2$ kann für u die Hilbertkurve gewählt werden; siehe [Sag94, S. 12: (2.1) Theorem].

Beispiel 12 (Ein nicht messbarer Urbildbereich). Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ nicht $\mathcal{H}^n$-messbar und $u : A \to \mathbb{R}^m$ konstant. Es gilt $\mathsf{Graph}\,u = A \times \{c\}^m$ und da A nicht $\mathcal{H}^n$-messbar ist, existiert nach Definition eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ welche $\mathcal{H}^n(S) \neq \mathcal{H}^n(S \cap A) + \mathcal{H}^n(S - A)$ erfüllt. Aufgrund der Ambienteninvarianz des Hausdorffmaßes folgt

$$\mathcal{H}^n(S \times \{c\}^m) \neq \mathcal{H}^n(S \times \{c\}^m \cap \mathsf{Graph}\,u) + \mathcal{H}^n(S \times \{c\}^m - \mathsf{Graph}\,u),$$

und $\mathsf{Graph}\,u$ ist als nicht-$\mathcal{H}^n$-messbare Menge nicht abzählbar n-rektifizierbar.

III.II Notwendige Bedigungen an die zugrundeliegende Abbildung

Proposition 13 (Messbarkeitsfolgerung). Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $u : A \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit abzählbar n-rektifizierbarem Graphen. Dann ist das u-Urbild einer jeden Borelmenge $B \subset \mathbb{R}^m$ lebesguemessbar.
Insbesondere ist $u : (A, \mathcal{A}_{\mathcal{L}^n}) \to (\mathbb{R}^m, \mathcal{A}_{\text{borel}})$ messbar und der Urbildbereich $A = u^{-1}(\mathbb{R}^m) \in \mathcal{A}_{\text{borel}}$ borel.

Beweis. Sei $B \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige Borelmenge. Da nach Lemma 6 der Graph $\mathsf{Graph}\,u \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine $\mathcal{H}^n$-σ-endliche Menge ist und die Projektionen auf die ersten n beziehungsweise letzten m Koordinaten $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$ beziehungsweise $\pi^\perp : \mathbb{R}^{n+m} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ lipschitzstetig und damit borelmessbar sind, gilt mit Lemma 2 und der Äquivalenz $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ [EG92, S. 70: 2.2 Theorem 2], dass das Bild $\pi(\mathsf{Graph}\,u \cap \pi^{\perp,-1}(B)) = u^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$ lebesguemessbar ist. □

Definition 14 (Vertikale Elemente des Graßmanns). Eine nicht orientierte Ebene $T \in \mathrm{G}(n+m, n)$ *steht vertikal*, falls mindestens eine ihrer nicht verschwindenden Richtungen $0 \neq \tau \in T$ auf $\mathbb{R}^n \times \{0\}^m$ orthogonal steht, das heißt für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n \times \{0\}^m$ das euklidische innere Produkt $\langle \tau, x \rangle = 0$ verschwindet.

Bemerkung 15. In der Sprache von Definition 14 ist folglich eine C^1-n-Untermannigfaltigkeit $N \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ein einem Punkt $p \in N$ genau dann lokal als C^1-Graph parametrisierbar wenn $\mathrm{T}_p N$ nicht vertikal steht.

Proposition 16 (Zerlegung in Graphen stetig differenzierbarer Abbildungen). Ein abzählbar n-rektifizierbarer Graph $\mathsf{Graph}\, u \subset \mathbb{R}^{n+m}$ einer Abbildung $u : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m$ ist zerlegbar in

$$\mathsf{Graph}\, u = G_\blacktriangledown + \sum_{j \in \mathbb{N}} G_j,$$

wobei $G_\blacktriangledown \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine $\mathcal{H}^n$-messbare in der Projektion lebesgue-verschwindende Menge ist, das heißt $\mathcal{L}^n(\pi(G_\blacktriangledown)) = 0$, und $G_j \subset \mathsf{Graph}\, v_j$ in C^1-Graphen eingebettete $\mathcal{H}^n$-messbare Teilmengen sind. Weiter ist jedes $v_j \in \mathrm{C}^1(V_j, \mathbb{R}^m)$ auf einer offenen Menge $V_j \subset \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und eine lokale u-Fortsetzung, genauer $u|(A \cap V_j) = v_j|(A \cap V_j)$.

Beweis. Nach [Sim83, S. 59: 11.1 Lemma] zerlege man den Graphen $\mathsf{Graph}\, u = M_0 + \sum_j M_j$ in eine $\mathcal{H}^n$-Nullmenge M_0 und abzählbar viele $\mathcal{H}^n$-messbare Mengen $M_j \subset N_j$ welche selbst in C^1-Untermannigfaltigkeiten $N_j \subset \mathbb{R}^{n+m}$ liegen. Setze $N_j^{\mathrm{v}} := \{p \in N_j : \mathrm{T}_p N_j \text{ steht vertikal}\}$ und bemerke, dass diese Teilmengen $N_j^{\mathrm{v}} = N_j \cap \mathsf{J}^{-1}(\{0\})$ mit der Stetigkeit des Jacobi borelmessbar sind. Weiter gilt mit der Flächenformel für C^1-Untermannigfaltigkeiten [Sim83, S. 47: 8.4] für die lineare Projektion $\pi' : \mathbb{R}^{n+m} \supset \mathsf{Graph}\, u \to \mathbb{R}^n$ auf die ersten n Koordinaten, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(\pi'(N_j^{\mathrm{v}})) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\pi'(N_j^{\mathrm{v}})} \,\mathrm{d}\mathcal{L}^n \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(\pi'^{-1}(\{y\}) \cap N_j^{\mathrm{v}}) \,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(y) \\ &= \int_{N_j^{\mathrm{v}}} \mathsf{J}\,\pi' \,\mathrm{d}\mathcal{H}^n = 0,\end{aligned}$$

da auf den Mengen N_j^{v} die Tangentialräume vertikal stehen, dadurch das Differential $\mathrm{D}\,\pi'$ nicht vollen Rang hat und somit der Jacobi

$$\mathsf{J}\,\pi' := \sqrt{(\mathrm{D}\,\pi')^\top \cdot (\mathrm{D}\,\pi')}$$

verschwindet.
Man definiere nun $G_\blacktriangledown := M_0 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j^{\mathrm{v}}$ und $G := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (N_j - N_j^{\mathrm{v}})$. Es wird im Folgenden G in abzählbar viele C^1-Graphen zerlegt. Sei dazu $p \in G \cap \mathsf{Graph}\, u$ beliebig. Da $p \in G$, existiert ein $j_p \in \mathbb{N}$ sodass $p \in N_{j_p}$ und $\mathrm{T}_p N_{j_p}$ nicht vertikal steht. Folglich hat das Differential $\mathrm{D}_p\,\pi'$ vollen Rang und für eine C^1-Parametrisierung der Untermannigfaltigkeit $f_p \in \mathrm{C}^1(W_p, N_{j_p})$ mit einer offenen Menge $W_p \subset \mathbb{R}^n$ und $p = f_p(x_p)$, wobei $x_p \in W_p$, hat das Differential $\mathrm{D}_{x_p} f_p$ vollen Rang. Man rechne nun für die Abbildung $\pi' \circ f_p : W_p \to \mathbb{R}^n$, dass

$$\mathrm{D}_{x_p}(\pi' \circ f_p) = \mathrm{D}_{f_p(x_p)}\,\pi' \circ \mathrm{D}_{x_p} f_p = \mathrm{D}_p\,\pi' \circ \mathrm{D}_{x_p} f_p$$

vollen Rang hat, also nach dem Satz über inverse Funktionen die Abbildung $\pi' \circ f_p$ lokal invertierbar ist. Demnach existiert offenes $V_p \subset W_p$ sodass

$$g_p := f_p \circ (\pi' \circ f_p)^{-1} : V_p \to N_{j_p}$$

eine Graphenparametrisierung ist. Setzt man $v_p := \pi^\perp \circ g_p$ als die Graphenfunktion, so folgt

$$\mathsf{Graph}\, u|(A \cap V_p) \subset \mathsf{Graph}\, v_p = \mathsf{Bild}\, g_p \subset G,$$

insbesondere $u|(A \cap V_p) = v_p|(A \cap V_p)$.
Mittels der Lindelöf-Eigenschaft des $\mathbb{R}^n$ wähle man nun abzählbar viele Paare $\{(v_j, V_j) : j \in \mathbb{N}\} \subset \{(v_p, V_p) : p \in G \cap \mathsf{Graph}\, u\}$ sodass $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_j \supset A$ überdeckt wird. Zuletzt setze man

$$G_j := \mathsf{Graph}\, u \cap \left(\mathsf{Graph}\, v_j - G_\blacktriangledown - \bigcup_{i<j} G_i \right).$$

□

Lemma 17 (Kurzsichtigkeit des approximativen Limes superior). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, $f : A \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $B \subset A$ eine $\mathcal{L}^n$-messbare Teilmenge sowie $a \in A$ ein Punkt welcher in $A - B$ Lebesguedichte Null aufweist, das heißt

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap (A - B))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} = 0.$$

In diesem Fall gilt

$$\operatorname{ap} \limsup_{x \to a} f(x) = \operatorname{ap} \limsup_{\substack{x \to a,\\ x \in B}} f(x).$$

Insbesondere folgt obige Gleichheit, wenn a in B Lebesguedichte Eins aufweist.

Beweis. Man beachte zunächst, dass für $r > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ die Mengengleichheit

$$\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t] \cap (A - B) = \mathrm{B}_r(a) \cap [f > t] - B$$

gilt. Nun rechne man die Dichte obiger Menge aus,

$$0 \leq \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t] - B)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} \leq \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap (A - B))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} = 0,$$

da a in $A - B$ Lebesguedichte Null besitzt.
Mit der $\mathcal{L}^n$-Messbarkeit von B folgt nun für den Quotienten im Infimum der Definition 9 des approximativen Limes superior, dass

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t])}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} \\
&\quad = \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t] \cap B) + \mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t] - B)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} \\
&\quad = \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t] \cap B)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} + \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t] - B)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} \\
&\quad = \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t] \cap B)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} + 0 \\
&\quad = \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f|(B) > t])}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))}.
\end{aligned}$$

Für den Zusatz rechne man für $a \in A$ mit Lebesguedichte Eins in B, das heißt

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap B)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} = 1,$$

dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap (A - B))}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} \\ &\leq \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) - B)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} \\ &= \limsup_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a)) - \mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap B)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} \\ &= 1 - \liminf_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap B)}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} = 0. \end{aligned}$$

Somit besitzt a Lebesguedichte Null in $A - B$ und die Behauptung folgt mit dem oben bereits Gezeigten. □

Lemma 18 (Der approximative Limes superior ist niemals größer als der Limes superior). Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine reelle Abbildung, sowie $a \in A$ ein Punkt. Es folgt

$$\operatorname{ap} \limsup_{x \to a} f(x) \leq \limsup_{x \to a} f(x).$$

Beweis. Nach Definition 9 ist

$$\operatorname{ap} \limsup_{x \to a} f(x) := \inf \left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{r \searrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t])}{\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a))} = 0 \right\}$$

gesetzt. Betrachte beliebiges festes reelles $t > \limsup_{x \to a} f(x)$. Es existiert folglich eine Umgebung $U_t \ni a$, in welcher $f|(U_t) \leq t$ gilt, da sonst eine Folge $y_k \to a$ existierte mit $f(y_k) > t$ und somit

$$\limsup_{x \to a} f(x) \geq \limsup_{k \to \infty} f(y_k) \geq t > \limsup_{x \to a} f(x)$$

folgte, ein Widerspruch. Damit muss $f|(U_t) \leq t$ gelten und für $r > 0$ beliebig, jedoch klein genug sodass $\mathrm{B}_r(a) \subset U_t$, folgt

$$\mathcal{L}^n(\mathrm{B}_r(a) \cap [f > t]) \leq \mathcal{L}^n(U_t \cap [f > t]) = \mathcal{L}^n(\emptyset) = 0,$$

und nach Definition muss $\operatorname{ap} \limsup_{x \to a} f(x) \leq t$ liegen. Da $t > \limsup_{x \to a} f(x)$ beliebig war folgt die Behauptung. □

Proposition 19 (Fast überall geltende Folgerung für die Abbildung). Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $u : A \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit abzählbar n-rektifizierbarem Graphen. Es folgt für $\mathcal{L}^n$-fast alle Punkte $a \in A$, dass

$$\operatorname{ap} \limsup_{x \to a} |u(x) - u(a)|/|x - a| < \infty.$$

Beweis. Mit Proposition 16 zerlege man den Graphen

$$\mathsf{Graph}\, u = G_\blacktriangledown + \sum_{j\in\mathbb{N}} G_j$$

mit dazugehörigen offenen Mengen $V_j \subset \mathbb{R}^n$ und differenzierbaren Abbildungen $v_j \in \mathrm{C}^1(V_j, \mathbb{R}^m)$, sodass $G_j \subset \mathsf{Graph}\, V_j$ liegt. Nach [EG92, S. 45: 1.7 Corollary 3] besitzt jede der $\mathcal{L}^n$-messbaren Mengen V_j eine Teilmenge $E_j \subset V_j$, sodass alle Punkte $a \in E_j$ Lebesguedichte Eins in V_j haben und $\mathcal{L}^n(V_j - E_j) = 0$ verschwindet. Somit gilt für

$$E := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j - \pi(G_\blacktriangledown) \subset A,$$

dass $\mathcal{L}^n(A - E) = 0$ und ohne mehr als eine Nullmenge zu verlieren können ausschließlich Punkte $a \in E$ betrachtet werden.
Für solche $a \in E$ existiert nun ein $j \in \mathbb{N}$ derart, dass $a \in V_j$ liegt und in V_j Lebesguedichte Eins hat. Es folgt mit den Lemmata 17 und 18, dass

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ap}\limsup_{x\to a} |u(x) - u(a)|/|x-a| \\
&\quad = \operatorname{ap}\limsup_{\substack{x\to a,\\ x\in V_j}} |u(x) - u(a)|/|x-a| \\
&\quad = \operatorname{ap}\limsup_{\substack{x\to a,\\ x\in V_j}} |v_j(x) - v_j(a)|/|x-a| \\
&\quad \leq \limsup_{\substack{x\to a,\\ x\in V_j}} |v_j(x) - v_j(a)|/|x-a| \\
&\quad \leq \|\mathrm{D}\, v_j(a)\| < \infty.
\end{aligned}$$

□

III.III Charakterisierung

SATZ 20 (Charakterisierung). Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $u : A \to \mathbb{R}^m$ gilt:

- Falls für jedes $a \in A$ der $\operatorname{ap}\limsup_{x\to a} |u(x) - u(a)|/|x - a| < \infty$ endlich ist, so ist $\mathsf{Graph}\, u$ abzählbar n-rektifizierbar.
- Falls der Graph $\mathsf{Graph}\, u$ abzählbar n-rektifizierbar ist, so gilt für $\mathcal{L}^n$-fast alle $a \in A$, dass $\operatorname{ap}\limsup_{x\to a} |u(x) - u(a)|/|x - a| < \infty$ endlich ist.

BEWEIS. Die jeweiligen Aussagen wurden in Proposition 10 beziehungsweise Proposition 19 gezeigt. □

Literatur

[Dug66] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Boston: Allyn und Bacon, Inc., 1966.

[EG92] Lawrence C. Evans und Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton, New York, London, Tokyo: CRC Press, 1992. ISBN: 0-8493-7157-0.

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 153. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1969.

[Sag94] Hans Sagan. *Space-Filling Curves*. New York, Berlin, Heidelberg u. a.: Springer, 1994. ISBN: 0-387-94265-3, 3-540-94265-3.

[Sim83] Leon Simon. *Lectures on Geometric Measure Theory*. Bd. 3. Australia: Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, 1983. ISBN: 0-86784-429-9.